

Grado en Biotecnología

Análisis Matemático – Convocatoria Extraordinaria – Febrero 2021

1. Supongamos que una población de animales hembras está dividida en dos grupos de edad: jóvenes y adultos. En cada etapa la sexta parte de jóvenes llegan a adultos. De una etapa a otra los adultos mueren. El número medio de crías de cada joven es de $3/4$ y el de cada adulto es de $3/2$.

Sea $\mathbf{X}(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix}$ el vector que nos da la población de jóvenes y adultos en la etapa n .

a) Comprueba que la dinámica de la población responde al modelo $\mathbf{X}(n+1) = \mathbf{M}\mathbf{X}(n)$ donde \mathbf{M} es una matriz de Leslie.

b) Diagonaliza la matriz \mathbf{M} y calcula \mathbf{M}^n (debes expresar todos los elementos de \mathbf{M}^n en función de n de la forma más simplificada posible).

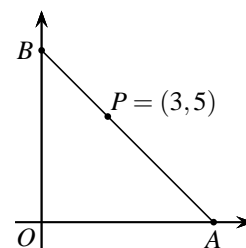
c) Calcula la matriz $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}^n$ de dos formas distintas: una usando el resultado anterior y otra usando un resultado de teoría que permite calcular dicho límite sin necesidad de calcular \mathbf{M}^n .

d) Discute el comportamiento en el futuro de la población y calcula las proporciones a largo plazo de los grupos de edad.

e) Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}(n)$ sabiendo que $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix}$.

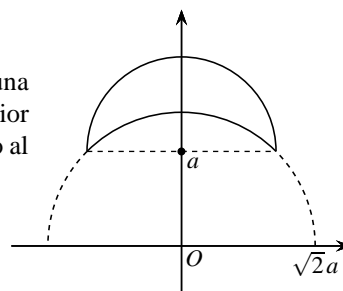
2.

Calcula el área del triángulo de área mínima determinado por una recta que pasa por el punto $(3, 5)$ y los ejes coordenados ($\triangle AOB$). Justifica que se trata de un mínimo absoluto.



3.

Sea $a > 0$. Calcula usando técnicas de integración el área de la luna formada por la parte del círculo $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ que es exterior al círculo $x^2 + y^2 = 2a^2$. Calcula el volumen del sólido obtenido al girar dicha luna alrededor del eje de abscisas.



4. Se considera la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 1$$

a) Calcula y clasifica los puntos críticos de f .

b) Calcula los extremos absolutos de f en el círculo $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.